19/11/19

Ειδικες περιπτωσεις τελεστων:

1) Αν $A \cdot |f\rangle = 0 \quad \forall |f\rangle \in S$ τότε ο τελεστής αυτός καλείται μηδενικός ($A=0$)

2) Αν $A \cdot |f\rangle = |f\rangle \quad \forall |f\rangle \in S$ τότε ο τελεστής καλείται ταυτοτικός

π.χ. Χώρος πραγμ. συν/σεων, $|f\rangle = f(x)$, αν $f(x) = e^x$ κ. $D = \frac{d}{dx}$, τότε $D|f\rangle = \frac{d}{dx} e^x = e^x$ ή $D|f\rangle = |f\rangle$,

όμως ο D δεν είναι ο ταυτοτικός γιατί δεν έχω το ίδιο αποτέλεσμα $\forall |f\rangle$ στον χώρο των πραγματικών συν/σεων

Ιδιότητες:

1) Δύο τελεστές A κ. B είναι ίσοι αν:

$$A \cdot |f\rangle = B \cdot |f\rangle \quad \forall |f\rangle \in S$$

2) Για έναν τελεστή A κ. μια σταθερά $a \in \mathbb{C}$ ορίζουμε την $B = Aa$, τ.ω. $B \cdot |f\rangle = Aa|f\rangle = A(a|f\rangle) = A \cdot |f'\rangle$ με $|f'\rangle = a \cdot |f\rangle$

Όμοια: $C = aA$, τότε $C \cdot |f\rangle = aA|f\rangle = a(A \cdot |f\rangle) = a \cdot |g\rangle$ με $|g\rangle = A \cdot |f\rangle$

Παρατήρηση: Η σειρά έχει σημασία ($aA \neq Aa$)

3) Το άθροισμα δύο τελεστών είναι τελεστής κ. ορίζεται ως: $C = A + B$

$$C \cdot |f\rangle = (A+B) \cdot |f\rangle = A \cdot |f\rangle + B \cdot |f\rangle = B \cdot |f\rangle + A \cdot |f\rangle = (B+A) \cdot |f\rangle$$

άρα $A + B = B + A \quad \forall |f\rangle \in S$

$\rightarrow$

4) Για τους A κ. B, ορίζουμε τον $C = AB$ τ.ω.

$C\cdot|f\rangle = AB\cdot|f\rangle = A\cdot(B|f\rangle) = A\cdot|g\rangle$, με $|g\rangle = B\cdot|f\rangle$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

(α) Οι πράξεις γίνονται με τη σειρά από δεξιά προς τα αριστερά $\longleftarrow$

(β) Γενικά $AB \neq BA$, άρα η σειρά των πράξεων έχει σημασία

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Χώρος των παραγ. συναρτήσεων, $|f\rangle = f(x)$

$A = \frac{d}{dx}$, $B = x$ τότε:

$$AB\cdot|f\rangle = A\cdot(B\cdot|f\rangle) = \frac{d}{dx}(xf(x)) = f(x) + x\frac{df(x)}{dx}$$

$$= |f\rangle + BA\cdot|f\rangle \quad (1)$$

$$BA\cdot|f\rangle = B\cdot(A\cdot|f\rangle) = x\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = x\frac{df(x)}{dx} = BA\cdot|f\rangle \quad (2)$$

$(1), (2) \rightarrow AB \neq BA$

<u>Παρατήρηση</u>: Είναι δυνατόν να έχουμε $AB = 0$, έστω αν $A, B \neq 0$

5) Ένας τελεστής λέγεται 1-1 αν:

$A\cdot|f\rangle = A\cdot|g\rangle \Rightarrow |f\rangle = |g\rangle$, $\quad |f\rangle, |g\rangle \in S$

δηλ. η εικόνα ή η δράση του A, δηλ. $A\cdot|f\rangle$ προσδιορίζει **πλήρως** το αρχικό διάνυσμα $|f\rangle$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$: Έστω μία συν/ση $f(x)$, κ. ο τελεστής $D=\frac{d}{dx}$

$D|f\rangle = \frac{df}{dx}$ κ. $D(|f\rangle + a) = \frac{d}{dx}(f(x)+a) = \frac{df}{dx} = D|f\rangle$

$a \in \mathbb{R}$

Δηλ. $D|f\rangle = D(|f\rangle + a) \not\Rightarrow |f\rangle \neq |f\rangle + a$

άρα ο τελεστής D δεν είναι 1-1 τελεστής

σ) Αν ένας τελεστής είναι 1-1 τότε $\exists$ ο αντίστροφος του τελεστής, συμβολίζεται ως A^{-1}, τ.ω.

$|g\rangle = A\cdot|f\rangle \Leftrightarrow |f\rangle = A^{-1}\cdot|g\rangle$

τότε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

<u>Δηλ.</u> αν ισχύει ότι $\begin{cases} |g\rangle = A\cdot|f\rangle \\ |f\rangle = A^{-1}\cdot|g\rangle \end{cases}$

τότε : $|f\rangle = A^{-1}\cdot|g\rangle = A^{-1}A|f\rangle$

<u>ή</u> $I|f\rangle = A^{-1}A|f\rangle$, δηλ. $I = A^{-1}A$

όμοια $AA^{-1} = I$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$: Έστω $A = \int_0^x dx'$, $x \in [0,1]$

δηλ. η δράση του A στον χώρο των ολοκληρώσιμων συν/σεων είναι : $A\cdot|f\rangle = \int_0^x f(s)ds$, $B = \frac{d}{dx}$

τότε $BA|f\rangle = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(s)ds\right) = f(x) = |f\rangle$

$AB|f\rangle = \int_0^x \frac{d}{ds}f(s)ds = \int_0^x \frac{df}{ds}ds = f(x) - f(0) = |f\rangle - f(0)$,

$AB \neq BA$ κ. $AB \neq I$

Ο αντίστροφος $\exists$ για τις συν/σεις $f(x)$, τ.ω. $f(0)=0$

Τότε $B = A^{-1} = \frac{d}{dx}$

Παρατήρηση: Για να $\exists$ ο αντίστροφος ενός τελεστή θα πρέπει: 1) $\forall |f\rangle \in S$, να $\exists\, |h\rangle \in T$ τ.ω.

$$|h\rangle = A\cdot|f\rangle$$

2) $A\cdot|f\rangle = A\cdot|g\rangle \Rightarrow |f\rangle = |g\rangle$ είναι 1-1 τελεστής

(Αντι) $\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Για το προηγούμενο παράδ., αν $g(x) = x^2+1$ με $g(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ να ορίζεται έτσι,

τότε $\nexists\, f(x)$ που να ικανοποιεί αυτή τη σχέση, αφού αναγκαστικά πρέπει $g(0)=0$.

Δηλ. $x^2+1 = g(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, $\nexists\, f(x)$, $x\in[0,1]$

γιατί $g(x)\big|_{x=0} = x^2+1\big|_{x=0} = 1 \neq 0$

7) Για δύο τελεστές που δε μετατίθονται, A κ. B, ορίζουμε τον μεταθέτη τους, $[\ \ ]$, ως:

$[A,B] = AB - BA$, με τις ιδιότητες

a) $[A,B] = -[B,A]$

b) $AB = BA \iff [A,B] = 0$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Να βρεθεί ο μεταθέτης, $A = \frac{d}{dx}$, $B = x$

$$[A,B]\cdot|f\rangle = (AB-BA)\cdot|f\rangle = AB\cdot|f\rangle - BA\cdot|f\rangle =$$

$$= \frac{d}{dx}(x f(x)) - x\left(\frac{df(x)}{dx}\right) =$$

$$= f(x) + \cancel{x\frac{df(x)}{dx}} - \cancel{x\frac{df(x)}{dx}} = f(x) = |f\rangle,$$

τότε $[A,B] = I$ ή $\left[\frac{d}{dx}, x\right] = I$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Θεωρούμε S του χώρο των πολ/μων βαθμού μικρότερου ή ίσου με N κ:

$: x^n \to n x^{n-1} + a x^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots, N$

Ο τελεστής της απεικόνισης:

$$A x^n = \left(\frac{d}{dx} + a\right) x^n = n x^{n-1} + a x^n$$

ή $A = \frac{d}{dx} + a$

- Γραμμικοί τελεστές

• **ΟΡΙΣΜΟΣ** : Ένας τελεστής σ' ένα δ.χ. S, λέγεται γραμμικός αν:

$(a)\ A\cdot(a|f\rangle) = a A|f\rangle$, $a \in \mathbb{C}$, $|f\rangle \in S$

$(β)\ A\cdot(|f\rangle + |g\rangle) = A|f\rangle + A|g\rangle$

Οι δύο ιδιότητες μπορούν να γραφούν ως:

$A(a|f\rangle + β|g\rangle) = aA|f\rangle + βA|g\rangle$, $a, β \in \mathbb{C}$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Ο τελεστής της παραγώγισης $D = \frac{d}{dx}$ είναι γραμμικός.

Θεωρούμε $|f\rangle, |g\rangle$, $|f\rangle = f(x)$ κ: $|g\rangle = g(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$D(a|f\rangle + b|g\rangle) = \frac{d}{dx}(a|f\rangle + b|g\rangle) =$$

$$= \frac{d}{dx}(af) + \frac{d}{dx}(bg) = a\frac{df}{dx} + b\cdot\frac{dg}{dx} =$$

$$= a D|f\rangle + b D|g\rangle$$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Ο τελεστής A με $A|f\rangle = Af(x) = f^2(x)$ είναι μη γραμμικός τελεστής

Ιδιότητες γραμμικών τελεστών:

1) Αν A κ. B γραμμικοί, τότε $C = A + B$ γραμμικός

ΑΠΟΔ.: $C(a|f\rangle + b|g\rangle) = (A+B)\cdot(a|f\rangle + b|g\rangle)$

$= A\cdot(a|f\rangle + b|g\rangle) + B(a|f\rangle + b|g\rangle)$

$= aA|f\rangle + bA|g\rangle + aB|f\rangle + bB|g\rangle$

$= a(A|f\rangle + B|f\rangle) + b(A|g\rangle + B|g\rangle)$

$= a(A+B)|f\rangle + b(A+B)|g\rangle$

$= aC|f\rangle + bC|g\rangle$

άρα C γραμμ. τελεστής

2) Αν ο A είναι γραμμικός, τότε κ. ο aA, $a \in \mathbb{C}$, είναι γραμμικός

3) Αν A κ. B είναι γραμμ. τελεστές τότε κ. ο AB είναι γραμμικός

ΑΠΟΔ.: $C = AB$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|f\rangle, |g\rangle \in S$

$C(a|f\rangle + b|g\rangle) = AB(a|f\rangle + b|g\rangle)$

$= A(aB|f\rangle + bB|g\rangle)$

$= aAB|f\rangle + bAB|g\rangle$

$= aC|f\rangle + bC|g\rangle$

άρα C γραμμ. τελεστής

ΠΑΡΑΔ.: 1) Για γραμμ. τελεστές ν.δ.ο. $A(BC) = (AB)C$

2) Για γραμμ. τελεστές ν.δ.ο.:

$$[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0$$

Σειρές Fourier (επανάληψη) $\boxed{\text{SOS}}$ κ' για το τέλος

$e_m(x) = e^{imx}$, $e_m^*(x) = e^{-imx}$, $x \in [-\pi, \pi]$ ή $[0, 2\pi]$

$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e_m(x)$; $f_m = \int_{-\pi}^{\pi} e_m^*(x) f(x) dx$

Fourier - πραγματική αναπαράσταση

$y = \sigma(x)$, $x \in [-\lambda, \lambda]$, με $\sigma(x) = \sigma(x + 2\lambda)$ περιοδική
με $T = 2\lambda$ τότε :

$$\sigma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) \right) \quad (*)$$

οι συντελεστές Fourier: $a_n = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) dx$

$$b_n = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) dx ,$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

<u>Παρατήρηση:</u> $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 , & m \neq n \\ \pi , & m = n \end{cases}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 , & m \neq n \\ \pi , & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad , \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

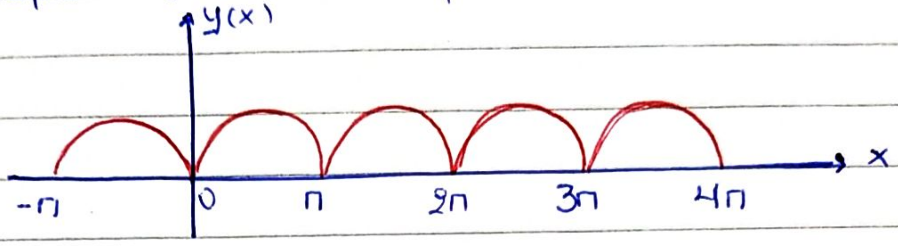
προκύπτουν από βασικές τριγωνομ. ταυτότητες

ΑΣΚΗΣΗ : Να γραφεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$y(x) = |\sin x|$

ΛΥΣΗ:

Παρατ. ότι είναι άρτια συνάρτηση



Η περίοδος $T = \pi$, άρα $2\lambda = \pi \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\pi}{2}}$

Αφού η $y(x)$ είναι άρτια είναι εύκολο ν.δ.ο. $b_n = 0$.

Αντίστοιχα αν η συνάρτηση είναι περιττή, οι $a_n = 0$

• $b_n = 0$:

$$n=0: \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$n \neq 0: \quad a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{\sin x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{\cos\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & n: \text{περιττό} \\ -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)}, & n: \text{άρτιο} \end{cases}$$

Με εφαρμογή του (*) έχουμε:

$$y(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4x) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6x) + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \cos(2nx) + \dots \right)$$

$$\boxed{\cos(mx) \cdot \sin(mx) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\right)}$$